Colles de Maths - semaine 21 - MP*1

Julien Allasia - ENS de Lyon

Exercice 1 Soit P une fonction polynomiale réelle de degré impair et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(x)}(x)| \leqslant |P(x)|.$$

Que dire de f ?

Exercice 2 Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ une fonction deux fois dérivable sur $]0,1[$ telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ tel que $|f''(x)| \geqslant 4$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ positive. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable.

Exercice 4 Déterminer tous les morphismes continues de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathrm{GL_n(R)}, \cdot)$.

Exercice 5 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que $f'(I)$ est un intervalle (autrement dit, toute dérivée vérifie les conclusions du théorème des valeurs intermédiaires).

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ se prolonge en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose de plus que $f''(0) \neq 0$ et $f(x) > 0$ $\forall x \neq 0$. Montrer qu'il existe g $\mathcal{C}^\infty$ telle que $g^2 = f$.

Exercice 7 Soit $T : \mathcal{C}^2([0,1]) \to \mathcal{C}^0([0,1])$ une application linéaire telle que si f possède un maximum local en $x_0 \in]0,1[$, alors $T(f)(x_0) = 0$. Montrer qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,1])$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, $T(f) = \varphi\, f'$.

Exercice 8 Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On pose, pour $k \in [\![0,n]\!]$, $M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$. On suppose que M_0 et M_n sont finis. Montrer que les M_k sont finis et que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$M_k \leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}}\, M_0^{1-\frac{k}{n}}\, M_n^{\frac{k}{n}}.$$